3. SĄLYGINIS EKSTREMUMAS

Sąlyginio ekstremumo uždavinys

Anksčiau nagrinėjome tokius variacinio skaičiavimo uždavinius:

$$\underset{y(x)}{\text{extr}} \int_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx\,,$$

ir

$$\underset{y(x)}{\text{extr}} \int_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx,$$
$$y(a) = A,\; y(b) = B,$$

Sutinkami uždaviniai, kai sąlygų skaičius yra didesnis nei paskutiniame uždavinyje. Šiame skyrelyje tirsime tokį *sąlyginio ekstremumo* uždavinį:

$$\underset{y(x)}{\text{extr}} \int_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx,$$
$$y(a) = A,\; y(b) = B,$$
$$\int_a^b G\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx = K.$$

čia K yra žinomas skaičius. Įrodoma, kad jei funkcija $y = y(x)$ yra šio uždavinio sprendinys, tai ji suteikia funkcionalui

$$\int_a^b F\big(x, y_\lambda(x), y_\lambda'(x)\big) + \lambda G\big(x, y_\lambda(x), y_\lambda'(x)\big)\, dx,$$
$$y_\lambda(a) = A,\; y_\lambda(b) = B,$$

ekstremumą, čia λ yra pastovus skaičius.

Pavyzdys. Rasti uždavinio ekstremalę:

$$\underset{y(x)}{\text{extr}} \int_1^2 y'^2 dx\,,$$
$$y(1) = 0,\; y(2) = 0,$$
$$\int_1^2 \frac{2y'}{x^2}\, dx = 1.$$

Sprendimas. Kadangi ieškoma funkcija $y = y(x)$ yra funkcionalo

$$\int_1^2 y'^2 + \lambda \frac{2y'}{x^2}\, dx\,,$$

ekstremalė, tai ji turi tenkinti jo Eulerio lygtį

$$2y'' - 4\frac{\lambda}{x^3} = 0\,,$$

kurios visi sprendiniai

$$y = \frac{\lambda}{x} + c_1 x + c_2\,,$$

o sprendinys, tenkinantis sąlygas $y(1) = 0,\ y(2) = 0$

$$y = \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right).$$

Skaičių λ rasime panaudoję sąlygą

$$\int_1^2 \frac{2y'}{x^2}\,dx = \int_1^2 \frac{2\lambda\left(\frac{-1}{x^2} + \frac{\lambda}{2}\right)}{x^2}\,dx = \frac{-\lambda}{12} = 1\,,$$

iš čia $\lambda = -12$, todėl

$$y = \frac{-12}{x} - 6x + 18\,.$$

Izoperimetrinis uždavinys 1

Tai toks *sąlyginio ekstremumo* uždavinys, kai ieškoma nurodyto ilgio l kreivė, einanti per taškus $P(a, A),\ Q(b, B)$ ir kuri kartu su atkarpa PQ apriboja didžiausio ploto sritį, t.y.

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{extr}_{y(x)} \int_a^b y\,dx,\\
&y(a) = 0,\ y(b) = 0,\\
&\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx = l,
\end{aligned}$$

nes nemažindami bendrumo, galime laikyti, kad atkarpa PQ sutampa su Ox ašimi − tai pasiekiama pasukus koordinačių sistemos ašis. Įrodysime, kad tokio uždavinio ekstremalės yra apskritimai. Parašę Eulerio lygtį funkcionalui $\operatorname*{extr}_{y(x)} \int_a^b y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}\,dx$

$$1-\lambda\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0$$

ir pertvarkę ją, gauname

$$\frac{y''}{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)}=\frac{1}{\lambda}=\mathrm{const}\,.$$

Kadangi kairioji šios lygybės pusė yra ekstremalės kreivis ir jis pastovus, todėl ekstremalė yra spindulio $r=|\lambda|$ apskritimas:

$$(x-x_c)+(y-y_c)=\lambda^2$$

Pavyzdžiui, sritis ribojama Ox ašies atkarpa $[0,1]$ ir ilgio $l=3$ kreive. Raskime didžiausią jos plotą.

Sprendimas. Kaip matėme tokia kreivė yra apskritimas $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=\lambda^2$. Iš čia

$$(0-x_c)^2+(0-y_c)^2=\lambda^2\,, \qquad \text{(nes [0,0] yra apskritimo taškas)}$$
$$(1-x_c)^2+(0-y_c)^2=\lambda^2\,. \qquad \text{(nes [1,0] yra apskritimo taškas)}$$

Todėl $x_c=0,5$. Jei ieškomo apskritimo lanko lygtis $y=y(x)$, tai jo ilgis

$$\int_0^1\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^1\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+(x-x_c)^2}}dx=\lambda\arcsin\left(\frac{x-0,5}{\lambda}\right)\Bigg|_0^1=2\lambda\arcsin\left(\frac{1}{2\lambda}\right)$$

Gautoji lanko ilgio išraiška apibrėžta intervale $\lambda\in[\frac{1}{2};\infty]$, o jos reikšmės priklauso intervalui $\left[1;\frac{\pi}{2}\right]$.

Todėl, jei lanko ilgis $1\le l\le\frac{\pi}{2}$, tai λ randama iš vienareikšmiškai išsprendžiamos lygties

$$2\lambda\arcsin\left(\frac{1}{2\lambda}\right)=l\,,$$

jei lanko ilgis $l>\frac{\pi}{2}$, tai iš lygties

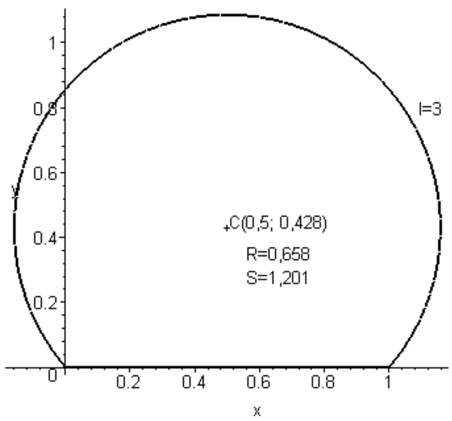
$$2\pi\lambda-2\lambda\arcsin\left(\frac{1}{2\lambda}\right)=l\,.$$

Kadangi $l=3>\frac{\pi}{2}$, tai $2\pi\lambda-2\lambda\arcsin\left(\frac{1}{2\lambda}\right)=3$.

Išsprendę šią lygtį rasime

$$\lambda=r=0{,}658\ldots,$$

o iš apskritimo lygties rasime $y_c=0,428\ldots$ ir ploto didžiausią vertę $S_{\max}=1,201\ldots$.



Izoperimetrinis uždavinys 2

Tarkime dabar, kad taškas $P(0,0)$ fiksuotas, o taškas $Q(b,0)$ gali laisvai judėti Ox ašimi. Tada, kaip ir pirmuoju atveju, matysime, kad ekstremalė yra spindulio $r=|\lambda|$ apskritimo lankas, jo centras $x_c=\dfrac{b}{2},\ y_c=\sqrt{r^2-x_c{}^2}$, o parametras λ yra lygties

$$2\lambda\arcsin\left(\frac{b}{2\lambda}\right)=l,\ \ l\le\frac{b\pi}{2},$$

arba

$$2\pi\lambda-2\lambda\arcsin\left(\frac{b}{2\lambda}\right)=l,\ \ l>\frac{b\pi}{2}$$

sprendinys.

Tuo būdu, sudarėme 3 lygtis 4 nežinomųjų $x_c,\,y_c,\,r,\,b$ radimui. Trūkstamą lygtį rasime pasinaudoję *transversalumo sąlyga*: taške $x=b$ vektorius $\left[F-y'F'_{y'},\ F'_{y'}\right]$ turi statmenas Ox ašiai:

$$\left(F-y'F'_{y'}\right)\cdot1+F'_{y'}\cdot0\Big|_{x\,=\,b}=0,\ \text{t.y.}\quad F-y'F'_{y'}=0\Big|_{x\,=\,b}.$$

Kadangi

$$F=y+\lambda\sqrt{1+y'^2},\ \ F'_{y'}=\lambda\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},\ \ F-y'F'_{y'}=y+\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}},$$

tai

$$y(b)+\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'(b)^2}}=0$$

Bet pagal sąlyga $y(b)=0$, todėl $y'(b)=\infty$, t.y. ekstremalė $y=y(x)$ taške $x=b$ turi būti statmena Ox ašiai, taigi ieškomas apskritimo lankas yra pusapskritimis, kurio spindulys $r=\dfrac{l}{\pi}$, o centras $C\left(\dfrac{l}{\pi},\,0\right)=C\left(r,\,0\right)$.

Grįžkime prie uždavinio spręsto ankstesniame skyrelyje, tik intervalą $[0,1]$ pakeiskime į $[0,b]$. Tada

$$b=2r,\quad r=\frac{3}{\pi},\quad S_{\max}=\frac{\pi r^2}{2}=\frac{9}{2\pi}=1{,}432...$$

Taigi, kaip buvo galima numatyti iš pradžių, gautasis plotas yra didesnis nei išnagrinėtame aukščiau fiksuoto ilgio intervalo atveju.

Izoperimetrinis uždavinys 3

Čia spręsime uždavinį: rasti nurodyto ilgio l kreivę $y = y(x)$, kuri kartu su duotąja kreive $y = \varphi(x)$ apriboja didžiausio ploto sritį, t.y. sąlyginio ekstremumo uždavinį

$$\begin{aligned} &\underset{a,b,y(x)}{\operatorname{extr}} \int_a^b (y-\varphi)\,dx, \\ &y(a)=\varphi(a),\; y(b)=\varphi(b), \\ &\int_a^b \sqrt{1+\varphi'^2}\,dx = l. \end{aligned}$$

Šio uždavinio sprendimui sudarome funkcionalą

$$\underset{y(x)}{\operatorname{extr}} \int\limits_a^b y-\varphi+\lambda\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

kurio Eulerio lygties

$$\frac{y''}{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)} = \frac{1}{\lambda} = \text{const}$$

sprendiniai vėl yra spindulio $R = |\lambda|$ apskritimai:

$$(x-x_c)+(y-y_c)=\lambda^2$$

Kreivių $y = y(x)$ ir $y = \varphi(x)$ susikirtimo taškuose (kai $x = a,\, x = b$) turi būti išpildomos transversalumo sąlygos:

$$\left(F - y'F'_{y'}\right)\cdot 1 + F'_{y'}\cdot\varphi'_x = 0\,.$$

Kadangi

$$F = y-\varphi+\lambda\sqrt{1+y'^2},\;\; F'_{y'} = \lambda\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},\;\; F - y'F'_{y'} = y-\varphi+\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}\,,$$

tai

$$y(x)-\varphi(x)+\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'(x)^2}}+\frac{\lambda y'(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}=0\,,\quad \text{kai} \quad x=a \text{ ir } x=b\,.$$

Tačiau $y(a)=\varphi(a),\; y(b)=\varphi(b)$, todėl

$$\begin{aligned} &y'(a)\varphi'(a)=-1, \\ &y'(b)\varphi'(b)=-1. \end{aligned}$$

Tai reiškia, kad apskritimo lankas (ekstremalė) ir duotoji kreivė kertasi stačiu kampu.

Pavyzdys. Sritis ribojama kreive $y=\varphi(x)\equiv\dfrac{1}{1+x^2}$ ir kreive $y=y(x)$, kurios ilgis $l=3$. Raskime didžiausią jos plotą.

Kaip matėme tokia kreivė yra apskritimas $(x-x_c)+(y-y_c)=\lambda^2$. Funkcija $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ lyginė, todėl ieškoma sritis simetrinė atžvilgiu Oy ašies, apskritimo centras $C(0,y_c)$, ir $a=-b$. Tegul β – kampas tarp kreivės $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ liestinės, išvestos iš taško $Q\left(b,\dfrac{1}{1+b^2}\right)$ ir Oy ašies. Tada

$$\mathrm{tg}\beta=\frac{(1+b^2)^2}{2b},$$

$$r=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{b\sqrt{1+8b^2+6b^4+4b^6+b^8}}{(1+b^2)^2},$$

čia r ieškomo apskritimo spindulys (kadangi kreivės taške Q kertasi stačiu kampu, todėl apskritimo spindulys, išvestas iš šio taško, sutampa su kreivės $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ liestine).

Apskritimo lanko ilgis

$$l=2r\beta$$

arba

$$3=2\frac{b\sqrt{1+8b^2+6b^4+4b^6+b^8}}{(1+b^2)^2}\mathrm{arctg}\left(\frac{(1+b^2)^2}{2b}\right)$$

Išsprendę šią lygtį gauname $b=1{,}176\ldots$ ir apskaičiuojame

$$r=1{,}273\ldots,$$
$$y_c=0{,}906\ldots,$$
$$\beta=1{,}178\ldots,$$

$$\max S=\int_{-b}^{b} y_c-\sqrt{r^2-x^2}-\frac{1}{1+x^2}\,dx=2{,}082\ldots$$